جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

@JOZVE_IUT

به نام خدا

امتحان میان ترم فیزیک ۲ **مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه** **تاریخ: ۱۳۹۵/۱۲/۱۹**

نام و نام خانوادگی: **شماره دانشجویی:**

شماره صندلی: **شماره تالار:**

سوال	۱	۲	۳	۴	جمع
نمره					

۱. مطابق شکل زیر، سه بار الکتریکی q+، 2q+ و 3q- روی رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع L، قرار داده شده اند.

(الف) بزرگی و جهت نیروی خالص وارد بر بار آزمون q_0+ در نقطه O (محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع) را تعیین نمایید. (۴ نمره)

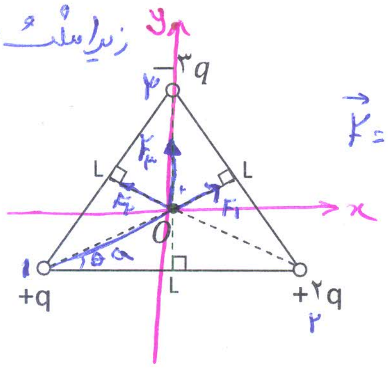
(ب) کار لازم برای آوردن بار آزمون q_0+ از بی نهایت به نقطه O را به دست آورید؟ (بار آزمون q_0+ در بینهایت و در نقطه O در حالت سکون است.) (۴ نمره)

زیرا مثلث متساوی الاضلاع است.

$\theta = 30 \rightarrow$

$\cos\theta = \frac{L/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow a = \frac{L}{\sqrt{3}}$



الف) نیروی برایند

$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$

$\vec{F_3} = \frac{kq_0(3q)}{a^2}\hat{j}$ نیروی جاذبه

$\vec{F_2} = \frac{kq_0(2q)}{a^2}(-\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})$ نیروی دافعه

$\vec{F_1} = \frac{kq_0 q}{a^2}(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})$ نیروی دافعه

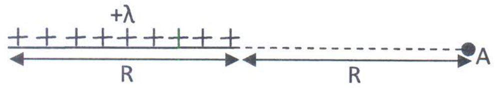
$$F = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \hat{j}\left(\frac{kqq_0}{a^2}\right)\underbrace{\left[3 + 2\sin 30 + 1\sin 30\right]}_{9/2} + \hat{i}\left(\frac{kqq_0}{a^2}\right)\underbrace{\left(-2\cos 30 + \cos 30\right)}_{-\sqrt{3}/2}$$

$$F = \frac{kqq_0}{(L/\sqrt{3})^2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{9}{2}\hat{j}\right) = \frac{3kqq_0}{2L^2}\left(-\sqrt{3}\,\hat{i} + 9\hat{j}\right)$$

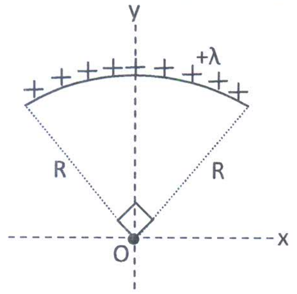
ب) در حالت تعادل: $\vec{F}_{\text{خارجی}} = -\vec{F_e} \Rightarrow W_{\text{خارجی}} = -W_e = -(-\Delta U) = \Delta U$

$$\Delta U = \frac{kq_0(-3q)}{a^2} + \frac{kq_0 q}{a^2} + \frac{kq_0(2q)}{a^2} = \frac{kqq_0}{a^2}(2+1-3) = 0$$

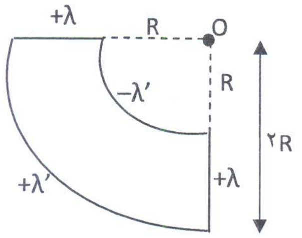
۲. (الف) در شکل زیر یک میله نازک نارسانا به طول R با چگالی بار خطی یکنواخت $+\lambda$، نشان داده شده است. مطلوب است بزرگی و جهت میدان الکتریکی حاصل از این توزیع بار در نقطه A (نقطه A، در راستای میله و به فاصله R از یک سر آن قرار گرفته است). (۳ نمره)



(ب) مطابق شکل زیر، ربعی از یک دایره عایق به شعاع R دارای چگالی بار خطی یکنواخت $+\lambda$ است. بزرگی و جهت میدان الکتریکی حاصل از این توزیع بار را در نقطه O (مرکز ربع دایره) به دست آورید. (۳ نمره)

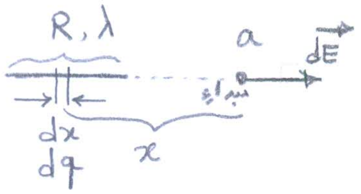


(ج) مطابق شکل زیر، یک حلقه نارسانای نازک از چهار قسمت تشکیل می‌شود: دو میله نارسانای مستقیم به طول L و چگالی بار خطی یکنواخت $+\lambda$، ربعی از یک دایره عایق به شعاع R و چگالی بار خطی یکنواخت $-\lambda'$ و ربعی از یک دایره عایق به شعاع ۲R و چگالی بار خطی $+\lambda'$. نسبت λ' به λ ($\frac{\lambda'}{\lambda}$) چقدر باشد تا میدان الکتریکی برآیند در نقطه O (مرکز ربع دایره‌ها) صفر باشد. (۳ نمره)



جواب ۲

الف)



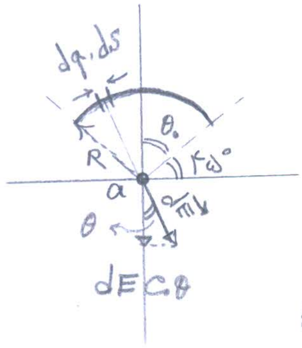
$$|d\vec{E}| = K\frac{dq}{x^2}$$

$$dq = \lambda\, dx$$

$$E = \int |d\vec{E}| = \int_R^{2R} K\frac{\lambda\, dx}{x^2} = K\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)_R^{2R} = +\frac{K\lambda}{2R}$$

$$E = \frac{K\lambda}{2R}$$

ب)



$$|d\vec{E}| = K\frac{dq}{R^2} \quad , \quad dq = \lambda\, ds = \lambda R\, d\theta$$

$$|d\vec{E}| = K\lambda\frac{d\theta}{R}$$

به علت تقارن فقط مولفه میدان در راستای محور تقارن وجود دارد

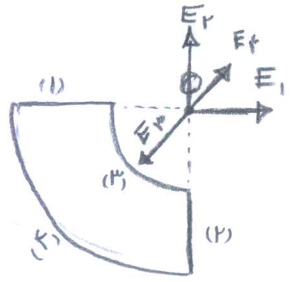
$$E_y = \int |d\vec{E}|\cos\theta = \frac{K\lambda}{R}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\cos\theta\, d\theta$$

$$E_y = \frac{2K\lambda}{R}\sin\theta_0$$

برای ربع دایره $\theta_0 = 45^\circ$

$$E_y = \frac{\sqrt{2}K\lambda}{R}$$

ج)



$$E_1 = \frac{K\lambda}{2R}$$

$$E_2 = \frac{K\lambda}{2R}$$

$$E_3 = -\frac{\sqrt{2}K\lambda'}{R}$$

$$E_4 = +\frac{\sqrt{2}K\lambda'}{2R}$$

در راستای محور x $\rightarrow$ $\underbrace{\left|(E_3 + E_4)\right|}_{\text{قدر مطلق}}\cos 45^\circ = E_1$

$$\frac{\sqrt{2}K\lambda'}{R}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{K\lambda}{2R} \rightarrow \lambda' = \lambda$$

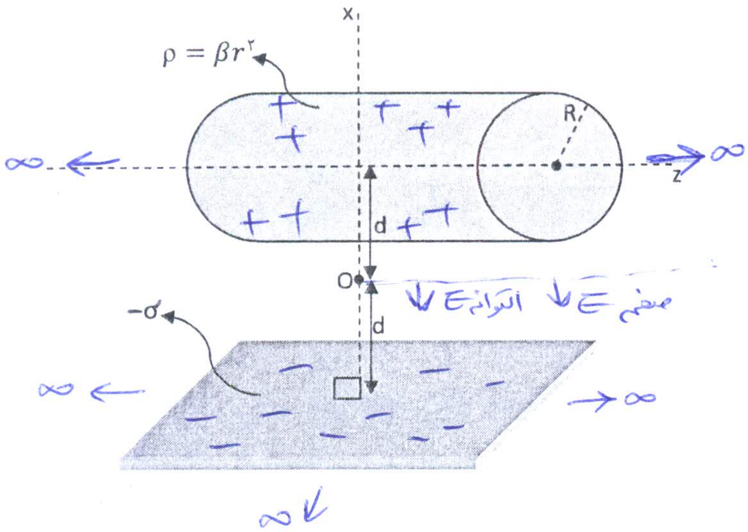
۳. در شکل زیر، یک استوانه نارسانای توپر به طول بی‌نهایت و شعاع R و چگالی بار حجمی غیریکنواخت $\rho = \beta r^2$ (β مقداری مثبت و ثابت و r فاصله شعاعی از محور استوانه یعنی محور zها است) نمایش داده شده است.

(الف) مطلوب است میدان الکتریکی داخل و (ب) خارج از استوانه. (۵ نمره)

حال مطابق شکل زیر، این استوانه باردار را در نزدیکی یک صفحه نازک نارسانای بی‌نهایت با چگالی بار سطحی $-\sigma$ قرار می‌دهیم. در این حالت مطلوب است،

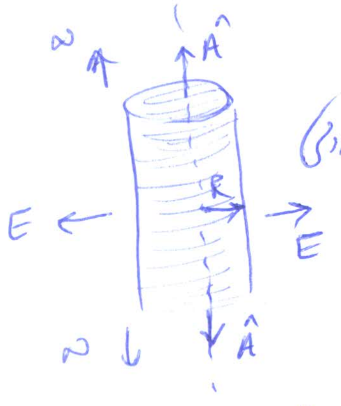
(ج) بزرگی و جهت میدان الکتریکی صفحه در نقطه O (نقطه O در وسط فاصله میان محور استوانه و صفحه قرار دارد). (۲ نمره)

(د) بزرگی و جهت میدان الکتریکی برآیند در نقطه O. (۲ نمره)



الف ، سطح گاوسی استوانه‌ای هم‌مرکز با مرکز استوانه باردار

در سطح r<R :



$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$ روی سطح گاوسی

$0 + 0 + \int E\,dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$ روی سطح جانبی استوانه

$E(2\pi r l) = \frac{\pi\beta l r^4}{2\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{\beta r^3}{4\varepsilon_0}}$ r<R میدان درون استوانه

$q_{in} = \int dq = \int \rho\,dV = \int \beta r^2 (2\pi r l\,dr) = 2\pi\beta l \int_0^r r^3\,dr = \frac{\pi\beta l}{2} r^4$

بخشی از استوانه با شعاع r و ضخامت dr (طول l)

ب : میدان خارج استوانه : r>R

سطح گاوسی استوانه‌ای هم محور با مرکز استوانه باردار در سطح r>R :

$\oint E\cdot dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

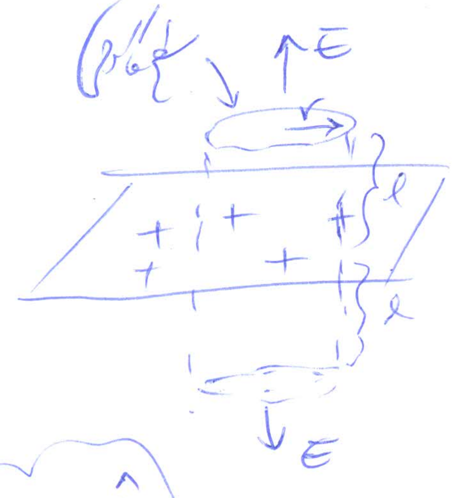
$0+0+\int E\,dA = q_{in}/\varepsilon_0$ روی سطح جانبی

$\rightarrow E(2\pi r l) = \frac{\pi\beta l R^4/2}{\varepsilon_0}$

$\rightarrow \boxed{E = \frac{\beta R^4}{4\varepsilon_0 r}}$ r>R میدان خارج استوانه

ادامه ی ۳

ج. میدان در اطراف یک صفحه نارسانا ی با بار :



$\oint E \cdot dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$ در سطح گاوسی

$0 + \int E dA + \int E dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$

دیواره جانبی — دور و جه پایینی — دور و جه بالا

$EA + EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$

$\vec{E}_{\text{صفحه}} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{i}$ ⇐ (در جهت $-X$) چون بار مثبت میدان به سمت دور به صفحه است.

د : ⇐ میدان در نقطه ی O : $E_O = E_{\text{استوانه}} + E_{\text{صفحه}}$ اندازه

$$= \frac{\beta R^4}{4\epsilon_0 r} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \xrightarrow[\text{نقطه } O]{r = d} \boxed{= \frac{\beta R^4}{4\epsilon_0 d} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

میدان برآیند در نقطه ی O

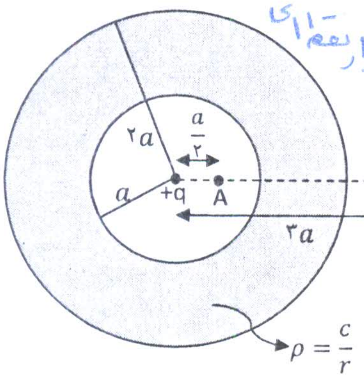
و جهت به سمت پایین $(-X)$

$$\boxed{\vec{E}_{\text{برآیند در نقطه ی O}} = -\left(\frac{\beta R^4}{4\epsilon_0 d} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right)\hat{i}}$$

۴. مطابق شکل زیر، یک پوسته کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی $b = ۲a$، دارای چگالی بار حجمی غیریکنواخت $\rho = \frac{c}{r}$ است (c مقداری ثابت و مثبت و r فاصله شعاعی از مرکز پوسته است). اگر بار نقطه‌ای q+ در مرکز پوسته قرار داده شود، مطلوب است:

(الف) میدان الکتریکی خالص در $r < a$، $a < r < b$ و $r > b$. (۴/۵ نمره)

(ب) اختلاف پتانسیل میان نقاط A و B (نقطه A در $r=\frac{a}{۲}$ و نقطه B در $r = ۳a$ قرار دارد). (۴/۵ نمره)



میدان الکتریکی در نواحی مختلف = میدان الکتریکی ناشی از پوسته + میدان بار نقطه‌ای

الف)

۱- میدان الکتریکی ناشی از پوسته :

$$r<a \rightarrow \oint \vec{E}_{1\,r<a} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = 0 \rightarrow E_{1\,r<a} = 0$$

$$a<r<b \rightarrow \oint \vec{E}_{1\,a<r<b} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\int \rho\, dV}{\varepsilon_0}$$

$$E_{1\,a<r<b}\, 4\pi r^2 = \frac{\int_a^r \frac{c}{r} 4\pi r^2\, dr}{\varepsilon_0} = \frac{c}{2\varepsilon_0}(r^2 - a^2)$$

$$E_{1\,a<r<b} = \frac{c}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$r>b \rightarrow \oint \vec{E}_{1\,r>b} \cdot d\vec{A} = \frac{\int_a^b \frac{c}{r} 4\pi r^2\, dr}{\varepsilon_0} \longrightarrow E_{1\,r>b}\, 4\pi r^2 = \frac{c}{2\varepsilon_0}(b^2 - a^2) \rightarrow E_{1\,r>b} = \frac{c}{2\varepsilon_0}\frac{b^2 - a^2}{r^2}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+q}{r^2}$$

میدان بار نقطه‌ای

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} r<a & E = \left[0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right]\hat{r} \\ a<r<b & E = \left[\frac{c}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right]\hat{r} \\ r>b & E = \left[\frac{c}{2\varepsilon_0}\frac{b^2 - a^2}{r^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right]\hat{r} \end{cases}$$

ب) ابتدا اختلاف پتانسیل دو نقطه ناشی از بار نقطه‌ای و بعد اختلاف پتانسیل ناشی از پوسته کروی را بین دو نقطه محاسبه می‌کنیم و مجموع اختلاف پتانسیل به دست می‌آید.

موفق باشید

$$V_{2(3a)} - V_{2(\frac{a}{2})} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3a} - \frac{2}{a}\right) = \boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{-5}{3a}}$$

اختلاف پتانسیل ناشی از بار q

(اكمل سؤال ٤ ب)

$$V_{1\,r>b} = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}_{1\,r>b} \cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^{r} \frac{c}{2\varepsilon_0} \frac{b^2-a^2}{r^2}\, dr = \boxed{\frac{c}{2\varepsilon_0}(b^2-a^2)\frac{1}{r}}$$

$$V_{1\,a<r<b} = -\int_{\infty}^{b} \vec{E}_{1\,r>b} \cdot ds - \int_{b}^{r} E_{1\,a<r<b} \cdot ds = \frac{c}{2\varepsilon_0}\frac{b^2-a^2}{b} - \int_{b}^{r} \frac{c}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) dr$$

$$= \frac{c}{2\varepsilon_0}\left[\frac{b^2-a^2}{b} - (r-b) - a^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)\right] = \frac{c}{2\varepsilon_0}\left[b - \cancel{\frac{a^2}{b}} + b - r - \frac{a^2}{r} + \cancel{\frac{a^2}{b}}\right]$$

$$V_{1\,a<r<b} = \boxed{\frac{c}{2\varepsilon_0}\left[2b - \left(\frac{a^2}{r}+r\right)\right]}$$

$$V_{1\,r<a} = -\int_{\infty}^{b} \vec{E}_{1\,r>b} \cdot d\vec{s} - \int_{b}^{a} E_{a<r<b} \cdot ds - \int_{a} E_{r<a} \cdot ds = \frac{c}{2\varepsilon_0}\left[2b - \left(\frac{a^2}{a}+a\right)\right]$$

$$= \boxed{\frac{c}{\varepsilon_0}(b-a)}$$

$$V_{1}(3a) - V_{1}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{c}{2\varepsilon_0}(b^2-a^2)\frac{1}{3a} - \frac{c}{\varepsilon_0}(b-a) = \frac{c}{2\varepsilon_0}a - \frac{c}{\varepsilon_0}a = \boxed{\frac{ca}{\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$V_{(3a)} - V_{\left(\frac{a}{2}\right)} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \boxed{\frac{-ca}{2\varepsilon_0} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{5}{3a}}$$